

臺北市立中正高級中學 115 學年度第 1 次專任教師甄選數學科初選試卷

一、填充題（每題 6 分）

1. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_7 = 1$ 且公差 $d > 0$ ，若 $\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = 11$ ，則公差 $d =$ _____。

2. 函數 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{5-x}$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的最大值為 _____。

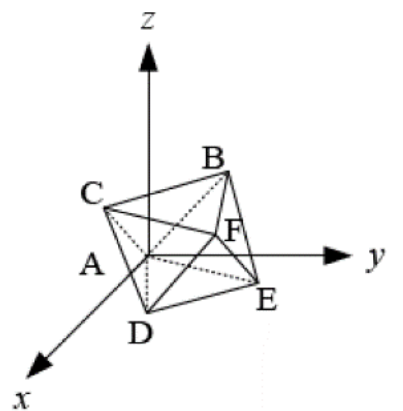
3. 集合 $S = \{1, 2, \dots, 8\}$ ，令 $T = \{(A, B) | A \subseteq S, B \subseteq S \text{ 且 } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset\}$ ，求 $n(T) =$ _____。

4. 已知三次函數 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 1$ ，求 $\sum_{k=1}^{200} f\left(\frac{k}{201}\right) =$ _____。

5. 計算 $\log_4 \left[(1 + \tan 1^\circ) \times (1 + \tan 2^\circ) \times \dots \times (1 + \tan 44^\circ) \times (1 + \tan 45^\circ) \right] =$ _____。

6. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長成等差數列，設公差 $d > 0$ 。若 $\triangle ABC$ 外接圓半徑 $R = \frac{8}{15}\sqrt{15}$ 、內切圓半徑 $r = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，試求公差 $d =$ _____。

7. 如右圖，正八面體 $ABCDEF$ 的邊長為 2。已知 A 為原點， A, D, E 為 xy 平面上的點， B 為 yz 平面上的點，則 B 到 y 軸的距離為 _____。



8. 計算無窮級數和： $\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \dots + \frac{n^2}{3^n} + \dots =$ _____。

9. 設多項式函數 $F(x) = (x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 1)^4 (x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 5x - 2)^3 (x^2 - 2x + 2)^7$ ，求其四階導數 $F^{(4)}(1) =$ _____。

10. 設方程式 $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 31 = 0$ 的三個根為 α, β, γ ，則 $(\alpha^3 + 27)(\beta^3 + 27)(\gamma^3 + 27) =$ _____。

11. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(2, -4)$ ，若 $\angle B, \angle C$ 之角平分線方程式分別為 $L_1: x + y - 2 = 0$ 及 $L_2: x - 3y - 6 = 0$ ，求 BC 直線之方程式為 _____。

12. 某老師欲安排接下來 4 月 10 日至 19 日（共 10 天）安排訓練規劃，其中有 5 天安排「高強度訓練日」，另外有 5 天安排「修復日」。為了評估此安排的訓練品質，定義：如果某個「高強度訓練日」的前一天與後一天剛好都是「修復日」，則該日稱為「黃金孤立訓練日」（因為此時運動員能量最飽滿）。如果隨機在這 10 天中安排 5 天「高強度訓練日」（假設 4 月 9 日與 20 日均為修復日），試求這 10 天中「黃金孤立訓練日」出現次數的期望值為 _____ 次。

二、計算題（除第 3 題 12 分外，其餘每題 8 分）

1. 設 n 為正整數，試證明： $1 + \frac{1}{2n-1} \leq \sqrt[3]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}$ 。

2. 設 $A(1, 2, -3)$ 、 $B(5, -4, 1)$ ， P 為平面 $E: x - 2y + 3z - 4 = 0$ 上任一點，試求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 最小值。

3. 將坐標平面上的圖形： $\Gamma: \frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{40} = 1$ 以原點為中心逆時針旋轉 45 度後，得到新的圖形 Γ' ，

試回答以下問題：

(1) 求出圖形 Γ' 的方程式。(4 分)

(2) 列出圖形 Γ' 上所有的格子點。(8 分)

臺北市立中正高中 115學年度第 1 次專任教師甄選數學科答案卷

1. 本次考試作答時間為 100 分鐘，鈴響後請停筆由監試人員協助收回題目卷及答案卷。
2. 答案卷以每人一份（共 4 張）為限，單面作答，不得要求增補，亦不得在答案卷背面計算。
3. 限在作答區內作答，依題號標示及題目卷指示作答。
4. 答案卷不得污損、破壞或塗改應試號碼，亦不得書寫考生姓名、應試號碼或與答案無關之文字或符號。
5. 因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致無法辨識或評閱而影響成績者，其後果由考生自行承擔。

【作答區】

一	填充題		
	1	2	3
	$\frac{\sqrt{61}}{30}$	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	6050
	4	5	6
	300	$\frac{23}{2}$	$\frac{1}{2}$
	7	8	9
	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{3}{2}$	-72
	1 0	1 1	1 2
	2366	$x + 7y - 6 = 0$	$\frac{5}{3}$